

第六届全国周培源大学生力学竞赛试题

出题学校：清华大学

满分：120分 时间：3小时

一、声东击西的射击手（30分）

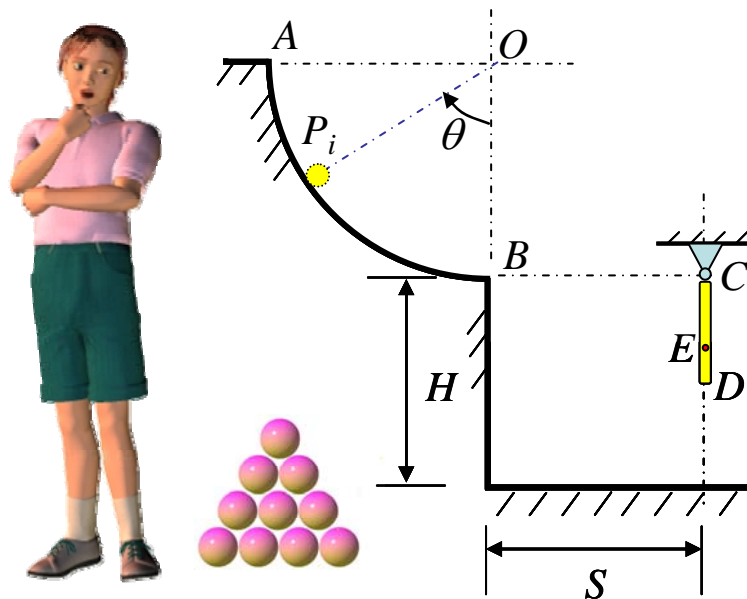
射击的最高境界，不仅是指哪打哪，还要知道往哪儿指。欢迎来到这个与众不同的射击场。在这里，共有10个小球 P_i （号码从0到9），你需要把某个小球放在圆弧的适当位置上，然后静止释放小球即可。

假设系统在同一竖直平面内（如图所示），不考虑摩擦。圆弧 AB 的半径为 R ， B 点与地面的高度为 H 。均质细杆 CD 的质量为 M ，长为 $L=0.5H$ ，悬挂点 C 与 B 处于同一水平位置， BC 距离为 S 。小球 P_i 质量均为 m ，不计半径，小球 P_i 与 CD 杆或地面碰撞的恢复因数均为 e_i ，且满足 $e_i = \sqrt{i/9}$ ($i=0,1,2,\dots,9$)。

(1) 为使小球 P_1 击中杆上 D 点，试确定静止释放时的 θ ，距离 S 有何限制？

(2) 假设某小球击中 CD 杆上的 E 点，为使 E 点尽可能远离 D 点，试确定该小球的号码及静止释放时的 θ ，此时 CE 的距离是多少？

(3) 假设某小球击中 CD 杆上的 E 点，为使悬挂点 C 处的冲量尽可能小，试确定该小球的号码及静止释放时的 θ ，此时 CE 的距离是多少？冲量有多大？



二、骄傲自满的大力士（35分）

有位大力士总是自命不凡，他夫人决定找机会教训他一下。正好附近足球场的球门坏了一半，剩下的半边球门如图：立柱 OA 垂直固定于水平地面上，沿 x 轴方向，高为 $H = 2.4\text{m}$ ，横梁 AB 平行于地面，沿 z 轴负方向，长为 $L = H$ 。立柱和横梁均为实心圆柱，直径均为 $D = 0.06\text{m}$ 。夫人经过计算后想出了主意：和丈夫比赛，看谁能把球门拉倒。比赛规则是：通过系在横梁 B 端中点的绳索，只能用静力拉球门；绳索上有且只有 B 点系在与地面固定的物体上。绳索的重量不计，长度不限。球门不计自重，采用第三强度理论，材料的屈服应力 $\sigma_s = 57\text{MPa}$ 。

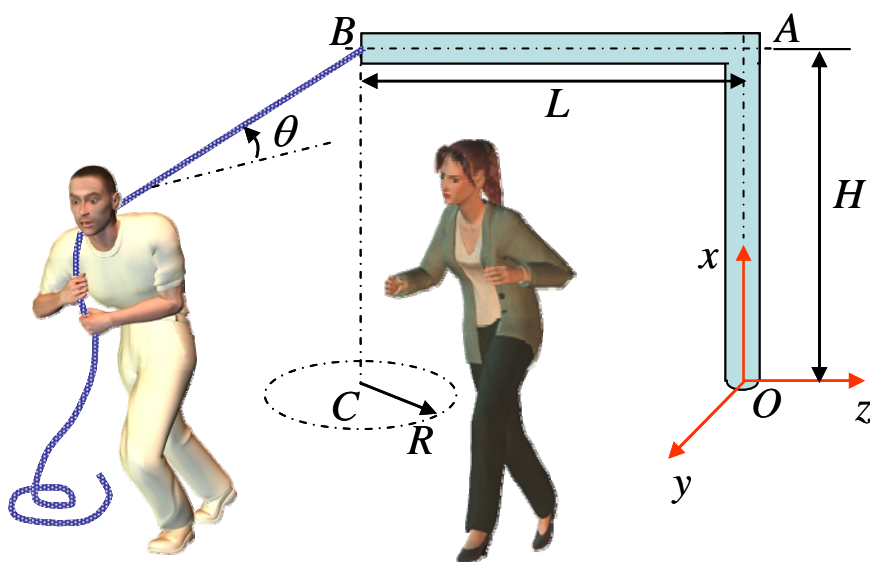
大力士认为自己肯定不会输，因为他知道两人鞋底与地面摩擦系数都是 $\mu = 0.5$ ，自己重量为 $G_1 = 700\text{N}$ ，夫人重量为 $G_2 = 510\text{N}$ 。为了显示自己的大度，他允许夫人享受一点点优惠条件。于是夫人以 B 在地面的投影 C 为圆心，在地面上画了一个半径 $R = 0.8\text{m}$ 的圆圈，要求丈夫身体在地面的投影不能进该圆圈，但她自己不受限制。大力士认为这么个小圆圈没什么了不起，就同意了。

大力士抽签先上场，他决定让绳索与 xy 平面平行，但绳索与地面的夹角 θ 不知多大为好，于是他在不同的角度试了多次，尽管每次都用了最大力气，但是球门居然纹丝不动，也看不出有明显的变形。而夫人上场后一用力就把球门拉倒了……

(1) 当大力士让绳索与地面成 θ 角度，绳索中的拉力最大为多大？该最大拉力与大力士拉绳的姿势有无关系？

(2) 当大力士让绳索与地面成 θ 角度，球门中最危险点的坐标值是多少？

(3) 在限制条件下， θ 角为多少时大力士最接近把球门拉倒？夫人可能采用什么方式把球门拉倒？



三、顾此失彼的挑战者（30分）

魔术正式开始前，魔术师邀请观众上台了解道具，并体验如何让水晶球在板上平衡，有位观众自告奋勇要挑战魔术师的问题。

魔术师首先介绍道具(如图所示):两个透明的水晶圆球 O_1 和 O_2 ;一个滚轴 D ;一个透明的水晶平板 AB , A 端水平固定在墙中,不考虑自重时 AB 板与水平面平行。在表演时,滚轴 D 可以根据需要安装在 AB 板的任意位置,且 A 与 D 总在同一高度。假设水晶板是均质等截面板,长度为 l ,单位长度重量为 q ,弯曲刚度为 EI 。两均质水晶圆球的半径均为 r ,重量均为 $P = ql$ 。

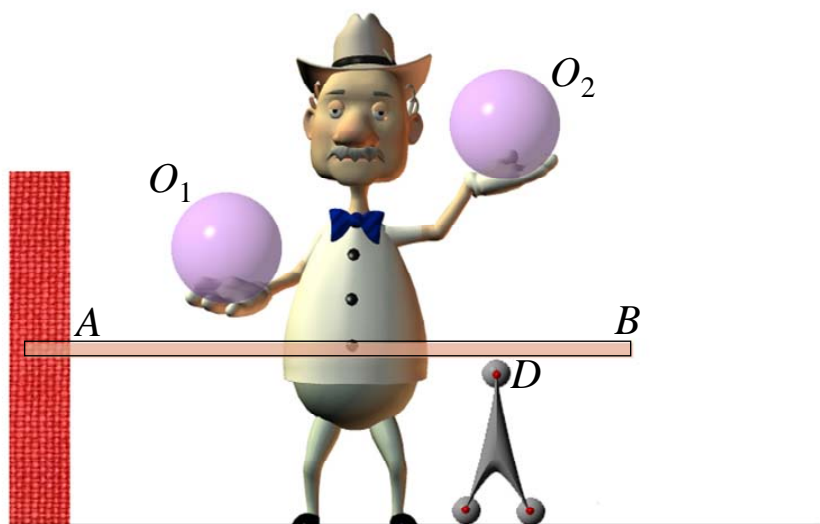
假设表演中板的挠度和转角都是小量,球与板之间有滑动摩擦,但不考虑球与板的接触变形和滚动摩擦。观众发现,水晶板由于自重而微微弯曲,如果不安装滚轴 D ,水晶球在板上可以摆放的任意位置都不能平衡。

魔术师的问题如下:

(1)如果把滚轴 D 安装在 AB 板的 B 处,此时 AB 板由于自重所导致的最大挠度在何处?

(2)如果把滚轴 D 安装在 AB 板之间的某处,有可能使水晶球 O_1 在板上静止,且球与板的接触点恰好是 B 点。如果不需要具体计算,如何说明滚轴 D 是更靠近 A 点还是更靠近 B 点?定性画出此时 AB 板挠度的示意图。

(3)如果把滚轴 D 安装在 AB 板的中点,能否让水晶球 O_1 在 AD 之间某位置平衡,接触点为 C_1 ;同时让水晶球 O_2 在 DB 之间某位置平衡,接触点为 C_2 。观众试着摆弄了很久,总是顾此失彼,最终也没有成功。如果你认为本问题有解, AC_1 和 AC_2 的水平距离是多少?如果没有解,如何证明?



四、技高一筹的魔术师（25分）

魔术正式开始，仍用上一题中的道具（板和球的具体参数见第三题）。

魔术师首先撤去了滚轴 D ，观众看到两个水晶球在板上任意位置静止释放，都会从板的 B 端掉下去。但是细心的观众发现，即使两水晶球放在板的相同位置，掉下去所需时间却明显不同。

魔术师解释说，虽然两水晶球的尺寸和重量完全相同，但有一个水晶球的表面涂了透明的新型材料，很光滑。说完在后落下的水晶球 O_1 表面贴上了小纸片以示区别（假设小纸片的尺寸和重量相对水晶球均是小量）。

只见魔术师对两个水晶球吹了吹，声称已经把魔力注入其中，然后小心地把贴有纸片的 O_1 球静止放在板上（接触点为 B 点），同时让纸片远离接触位置，松手后水晶球 O_1 竟然真的可以一直稳稳地停留在板上 B 点。

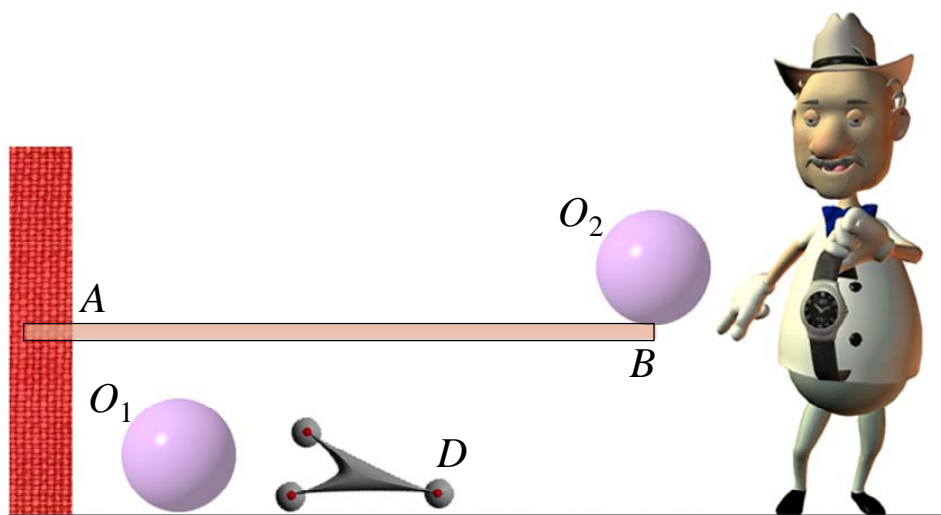
在观众的掌声中，魔术师撤走了 O_1 球，把 O_2 球拿了起来。“这个水晶球不太听话，我的魔力只能管 1 分钟。”魔术师说完把 O_2 球转了转，然后更加小心地把 O_2 球也放在板上（接触点为 B 点）。观众发现， O_2 球在 B 点停留了大约 1 分钟，然后在没有外界干扰的情况下突然从板上 B 端掉了下来……

(1) 根据题目叙述，试判断哪个水晶球涂了新型材料？

(2) 水晶球 O_1 可在 B 点一直稳稳地停留，简要叙述其原理，分析其中所涉及的关键参数，以及各参数应满足的必要条件或关系。

(3) 水晶球 O_2 只能在 B 点停留很短的时间，简要叙述其原理，分析其中所涉及的关键参数，以及各参数应满足的必要条件或关系。

注：第四题解答中所用的参数都应在第三、第四题中提及过。



第六届全国周培源大学生力学竞赛试题参考答案

清华大学航天航空学院
高云峰

一、声东击西的射击手（30分）

(1) $\theta = \arccos\left(1 - \frac{S^2}{2HR}\right)$; S 的限制为 $S \leq \sqrt{2HR}$ 。

(2) $e_9 = 1$ (号码为 9); $CE = 0$; $\theta = \arccos\left(1 - \frac{S^2}{16N^2HR}\right)$, N 为与地面的碰撞次数。

(3) $e_6 = \sqrt{\frac{6}{9}}$ (号码为 6); $CE = \frac{1}{3}H$; $I_C = 0$; $\theta = \arccos\left(1 - \frac{S^2}{4(1+e_6)^2HR}\right)$ 。

二、骄傲自满的大力士（35分）

(1) $T = \frac{\mu G_1}{\cos\theta + \mu \sin\theta}$; 大力士拉绳的姿势不影响绳中最大拉力的大小。

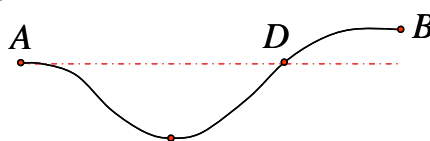
(2) 危险点坐标 $(0, \frac{1}{2}D \cos\theta, -\frac{1}{2}D \sin\theta)$

(3) 大力士在 $\theta = 0$ 时最接近拉坏球门: $\sigma_1 - \sigma_3 = 56.0 \text{MPa}$; 夫人进入圆圈内, $\theta = 90^\circ$ 时可以有 $\sigma_1 - \sigma_3 = 57.9 \text{MPa}$

三、顾此失彼的挑战者（30分）

(1) 最大挠度处: $x = \frac{15 - \sqrt{33}}{16}l \approx 0.58l$

(2) 滚轴 D 更靠近 B 点; 挠度示意图如下:



(3) 解不存在, 证明见解题过程。

四、技高一筹的魔术师（25分）

(1) 水晶球 O_2 涂了新型材料。

(2) 关键参数: $\mu_1 \geq \tan\theta_B$; 纸片重量 $G \geq \frac{P \sin\theta_B}{1 - \sin\theta_B}$, ($\theta_B = \frac{2}{3} \frac{ql^3}{EI}$)。

(3) 关键参数: $\mu_2 = \tan\theta_B$; 初始角速度 $\omega_0 \approx \frac{150g \sin\theta_B}{r}$ 。