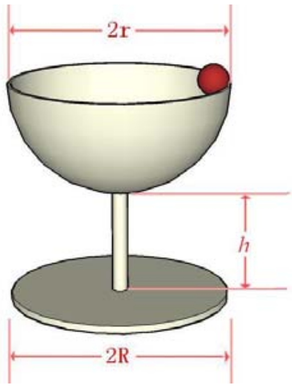
第七届全国周培源大学生力学竞赛评分标准

一、小球在高脚玻璃杯中的运动(20 分)

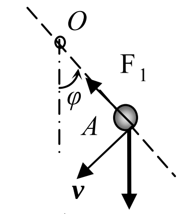
一半球形高脚玻璃杯，半径 r =5cm，其质量 m_1=0.3 kg，杯底座半径 R =5 cm，厚度不计，杯脚高度 h =10 cm。如果有一个质量 $m_2=0.1\,\text{kg}$ 的光滑小球自杯子的边缘由静止释放后沿杯的内侧滑下，小球的半径忽略不计。已知杯子底座与水平面之间的静摩擦因数 $f_s=0.5$。试分析小球在运动过程中：（1）高脚玻璃杯会不会滑动；（2）高脚玻璃杯会不会侧倾（即一侧翘起）。



解： （1）分析杯子滑动情况

设杯子不动，小球在杯子未运动前不脱离杯子。取小球为研究对象，受力如图所示，应用动能定理有

$$\frac{1}{2}\mathrm{m}_2 v^2-0=m_2\mathrm{gr}\cos\varphi \qquad （2 分）$$



（1 分）

即 $\mathrm{v}^2=2\mathrm{gr}\cos\varphi$

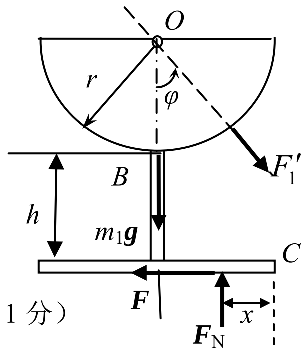
由牛顿运动定理有

$$m_2.\frac{v^2}{r}=F_1-m_2 g\cos\varphi \qquad （2 分）$$

解得

$$F_1=3\mathrm{m}_2\mathrm{g}\cos\varphi \qquad （1 分）$$

取杯子为研究对象，受力如图所示，



（1 分）

$$\sum F_x=0，\ F_1'\sin\varphi-F=0$$

$$\sum F_y=0，\ F_N-m_1 g-F_1'\cos\varphi=0 \qquad （2 分）$$

解得
$$F=\frac{3}{2}\mathrm{m}_2\mathrm{g}\sin 2\varphi$$
$$F_{\mathrm{N}}=m_1\mathrm{g}+3\mathrm{m}_2\mathrm{g}\cos^2\varphi \qquad （1 分）$$

最大静滑动摩擦力 $F_{\max}=f_s.F_N$，而

$$F_{mam}-F=1.5\,m_2 g(1+\cos^2\varphi-\sin 2\varphi)\geq 0$$

由于 $F\leq F_{\max}$，所以杯子不滑动。 （2 分）

（2）分析杯子侧倾（一侧翘起）情况

杯子处于侧倾的临界平衡状态时， $x=0$

$$\sum M_C=0,\ m_1 gR - F_1' \sin\varphi(h+r-r\cos\varphi)+F_1'\cos\varphi(R-r\sin\varphi)=0$$ （2 分）

得 $1+\cos^2\varphi-3\sin\varphi\cos\varphi=0$ （2 分）

解得 $\cos\varphi\doteq0.45$，$\varphi\doteq63.3°$；$\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\varphi=45°$。

即 $\varphi=63.3°$ 时，杯子倾侧（一侧翘起）。 （2 分）

通过以上分析得知，当小球自杯子的边缘由静止释放后沿杯子的内侧滑下到与铅垂方向夹角 $\varphi=63.3°$ 时，高脚玻璃杯侧倾（一侧翘起）。 (2 分)

二、杂耍圆环(40 分)

1.杂技演员将一个刚性圆环沿水平地面滚出，起始圆环一跳一跳地向前滚动，随后不离开地面向前滚动，为什么？（4 分）

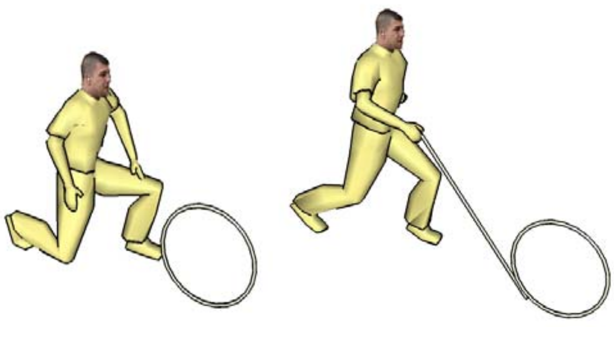
2.杂技演员拿出一个匀质圆环，沿粗糙的水平地面向前抛出，不久圆环又自动返回到演员跟前。设圆环与地面接触瞬时圆环中心 O 的速度大小为 v_0，圆环的角速度为 ω_0，圆环半径为 r，质量为 m，圆环与地面间的静摩擦因数为 f_s，不计滚动摩阻，试问：

（1）圆环能自己滚回来的条件是什么？（10 分）

（2）圆环开始向回滚动直到无滑动地滚动，在此运动过程中，圆环所走过的距离是多少？（5 分）

（3）当圆环在水平地面上无滑动地滚动时，其中心的速度大小为 v_1，圆环平面保持在铅垂平面内。试分析圆环碰到高为 $h(h<\dfrac{r}{2})$ 的无弹性台阶后， 能不脱离接触地爬上该台阶所应满足的条件。（14 分）

3.演员又用细铁棍推动题 2 中匀质圆环在水平地面上匀速纯滚动，假设圆环保持在铅垂平面内滚动，如图所示。又知铁棍与圆环之间的静摩擦因数为 f_t，圆环与地面间的滚动摩阻系数为 δ 。试求为使铁棍的推力（铁棍对圆环的作用力）最小，圆环上与铁棍的接触点的位置。（7 分）



解：1. 圆环不是匀质的，质心不在圆环的中心。开始滚动角速度大，圆环一跳一跳地向前滚动；

随后角速度减小，所以圆环不离开地面向前滚动。 (4 分)

2.（1）圆环能自己滚回的条件

圆环初瞬时环心速度为 v_0，角速度大小为ω_0，以后为 v 和ω。圆环与地面接触点的速度大小为

$$u=v+r\omega \quad (1)$$ (1 分)

第一阶段，u>0，圆环与地面有相对滑动，摩擦力 $F=f_sF_N$，式中 $F_N=mg$ 。

由质心运动定理 $$m\frac{dv}{dt}=-mgf_s \quad (2)$$ (2 分)

解得 $$v=v_0-f_sgt \quad (3)$$

由 $$mr^2\frac{d\omega}{dt}=-mgf_sr \quad (4)$$ (2 分)

解得 $$\omega=\omega_0-\frac{f_sgt}{r} \quad (5)$$

由于摩擦力存在，v 和ω都随时间而减小。

第二阶段，由（1），（3），（5）式解得

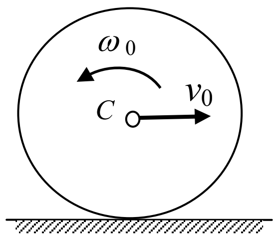
$$u=(v_0+r\omega_0)-2f_sgt$$ (1 分)

当 u=0 时刻开始摩擦力为零，有 $$t_1=\frac{(v_0+r\omega_0)}{2f_sg} \quad (6)$$ (2 分)

此时质心速度大小为 $$v_1=v_0-f_sgt_1$$

要使得圆环返回，则 $v_1<0$ ，圆环自己滚回的条件为

$$\omega_0>\frac{v_0}{r}$$ 方向如图所示。 (2 分)



（2）离最远处开始无滑动地滚动的距离

圆环到达最远距离时，v=0，时间为 $t_2=\frac{v_0}{f_sg}$； (2 分)

当 u=0 时刻开始无滑动滚动，有 $t_1=\frac{(v_0+r\omega_0)}{2f_sg}$； (1 分)

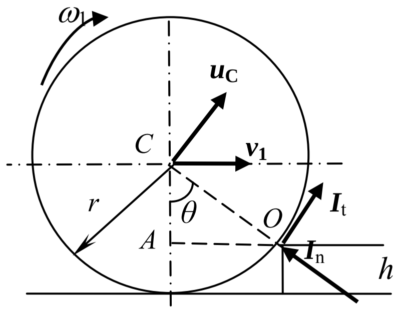
在此过程中，加速度的大小为 $a=f_sg$

所求距离： $$s=\frac{1}{2}\cdot gf_s\cdot(t_1-t_2)^2=\frac{(r\omega-v_0)^2}{8gf_s}$$ (2 分)

（3）圆环能不脱离接触地爬上台阶所应满足的条件

因为圆环只滚不滑，$v_1=r\omega_1$，塑性碰撞后，环绕 O 定轴转动，环心速度 $u_C=r\omega_2$

碰前对 O 点的动量矩 $L_{O1}=mv_1(r-h)+J_C\omega_1$



(1 分)

碰后对 O 点的动量矩 $L_{O2}=J_O\omega_2$　　其中 $J_O=2mr^2$

由于碰撞时对 O 点动量矩守恒，则 $L_{O2}=L_{O1}$，即

$$J_O\omega_2=mv_1(r-h)+J_C\omega_1 \qquad (2 分)$$

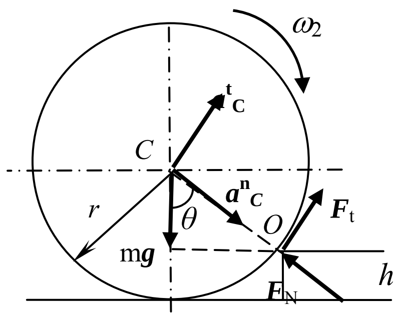
解得碰撞后角速度　$\omega_2=\dfrac{2r-h}{2r^2}v_1$　　(1 分)

要使圆环爬上台阶的条件是：当重心上升到最高位置时，还有剩余动能。

由动能定理得　$\dfrac{1}{2}J_O\omega_3^2-\dfrac{1}{2}J_O\omega_2^2=-mgh$，　(2 分)

式中ω_3重心上升到最高位置时的角速度

即　$\dfrac{1}{2}J_O\omega_2^2-mgh=\dfrac{1}{2}J_O\omega_3^2>0$　　(1 分)



将ω_2代入整理得圆环爬上台阶的条件

$$4r^2hg<v_1^2(2r-h)^2 \qquad (1 分)$$

碰撞结束后，由质心运动定理有　$mr\omega_2^2=mg\cos\theta-F_N$

即　$F_N=mg\cos\theta-mr\omega_2^2$　　(1 分)

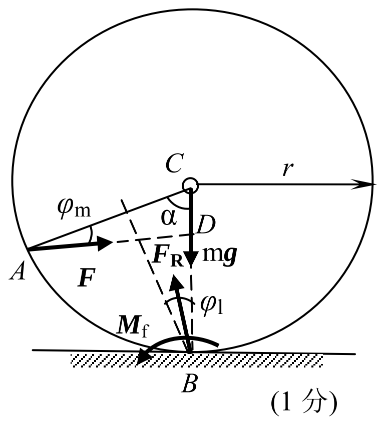
圆环不跳起，应有 $F_N>0$，即 $mg\cos\theta-mr\omega_2^2>0$。(2 分)　　(1 分)

将ω_2和 $\cos\theta=\dfrac{r-h}{r}$ 代入整理得圆环不跳起的条件　$v_1^2(2r-h)^2<4r^2(r-h)g$　(1 分)

圆环能不脱离接触地爬上台阶的条件为

$$4r^2hg<v_1^2(2r-h)^2<4r^2(r-h)g \qquad (1 分)$$

3．确定推动力 *F* 为最小值时的接触点 A



(1 分)

设半径 CA 与铅垂线间的夹角为 α。A，B 两点处的摩擦角分别为 $\varphi_m=\mathrm{arctg}f_t$ 和 $\varphi_l=\mathrm{arctg}f_s$

滚动摩阻力偶矩为 M_f。圆环匀速滚动时，重力 $m\mathbf{g}$、地面全反力 $\boldsymbol{F}_R$、推动力 $\boldsymbol{F}$ 和滚阻力偶 M_f 相平衡。

$$\sum M_B=0,\ \ -F\sin(\alpha+\varphi_m)\cdot DB+M_f=0 \qquad (2 分)$$

得　$F\sin(\alpha+\varphi_m)[r-\dfrac{r\sin\varphi_m}{\sin(\alpha+\varphi_m)}]=M_f$

即　$Fr[\sin(\alpha+\varphi_m)-\sin\varphi_m]=M_f$

(2 分)

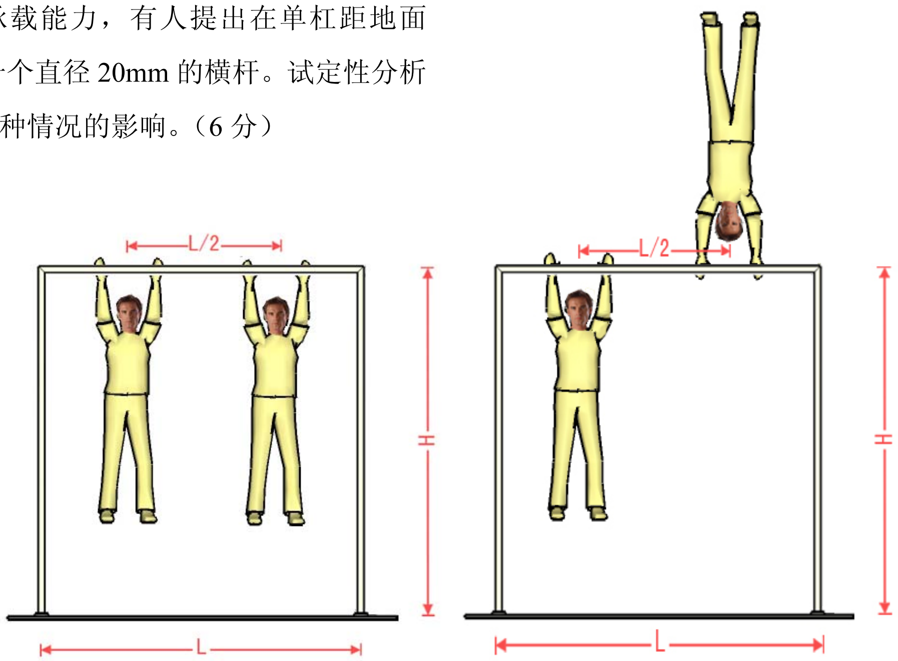
因此有　$F=\dfrac{M_f}{r[\sin(\alpha+\varphi_m)-\sin\varphi_m]}$

当 $\sin(\alpha+\varphi_m)=1$，即 $\alpha+\varphi_m=\dfrac{\pi}{2}$，亦即 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}f_t$ 时，推动力 F 取最小值。(2 分)

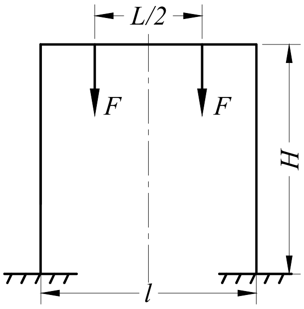
三、趣味单杠(30 分)

单杠运动是奥运会、世界体操锦标赛、世界杯体操比赛中男子体操比赛项目之一。单杠是体操比赛中最具观赏性的项目，也是观众最喜欢的运动，在学校和健身场所拥有众多的爱好者，小李和小张就是其中之一。一天，他们准备在单杠上进行大回环比赛。假设单杠的横杆和立柱均为直径 D=28mm 的钢杆，弹性模量 E=200GPa，许用应力[σ]=160MPa，横杆长 L=2.4m，立柱高 H=2.6m。立柱与地面、横杆与立柱之间均为固定联结。假设两人旋转到单杠所在平面内时的惯性载荷均为 F=1000N，不计人的自重。

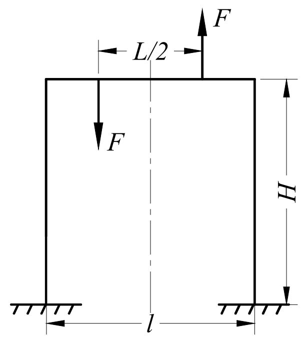
1. 试分析两人同步旋转到单杠所在平面内时，结构中的最大应力。（12 分）
2. 若两人相差 180°旋转到单杠所在平面内，对结构中的最大应力有什么影响。（12 分）
3. 为提高结构承载能力，有人提出在单杠距地面 0.6m 处增加一个直径 20mm 的横杆。试定性分析该杆对上述两种情况的影响。（6 分）



解：



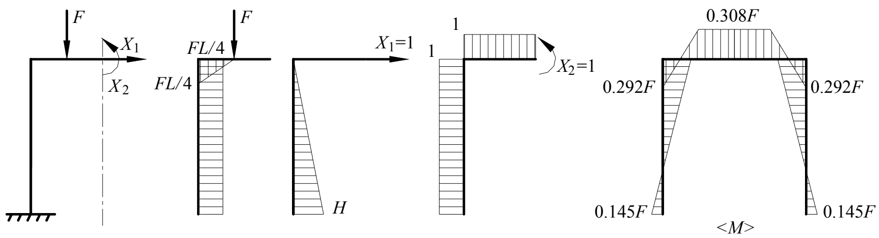
图（a）



图（b）

1.两人同步旋转到单杠所在平面内时（如图（a）所示），结构左右对称，可以取图（c）部分分析，在对称面上只有对称内力。根据力法方程得

$$\begin{cases}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1F}=0\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2F}=0\end{cases}$$ （3 分）



图（c）

分别作出 F 和单位力引起的弯矩图，可得：

$$EI\delta_{11}=\frac{1}{2}\times H\times H\times\frac{2}{3}H=\frac{H^3}{3}=5.86$$

$$EI\delta_{22}=1\times\frac{L}{2}\times 1+1\times H\times 1=\frac{L}{2}+H=3.8$$

$$EI\delta_{12}=EI\delta_{21}=-\frac{1}{2}\times H\times H\times 1=-\frac{H^2}{2}=-3.38$$

$$EI\Delta_{1F}=\frac{1}{2}\times H\times H\times\frac{1}{4}FL=\frac{FLH^2}{8}=2.028F$$

$$EI\Delta_{2F}=-\frac{1}{2}\times\frac{L}{4}\times\frac{1}{4}FL\times 1-\frac{1}{4}FL\times H\times 1=-\frac{FL^2}{32}-\frac{FLH}{4}=-1.74F$$

代入力法方程解得 $X_1=-0.168F$， $X_2=0.308F$ （6 分）

所以，可以作出结构的弯矩图，可知最大弯矩 $M_{\max}=0.308F=308\mathrm{N\cdot m}$（1 分）

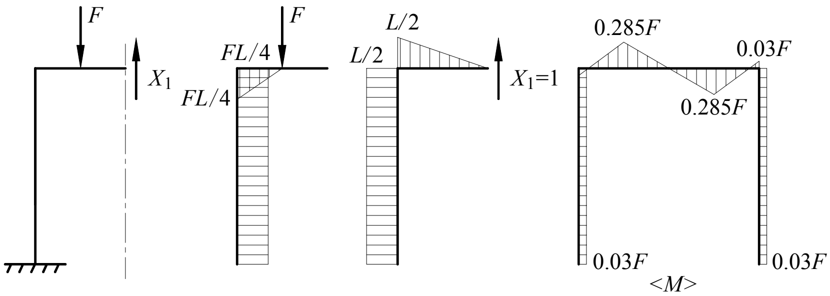
梁的抗弯截面模量　　$W = \frac{\pi}{32} D^3 = \frac{\pi}{32} \times 28^3 = 2155\text{mm}^3$

最大应力　　$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = 143\text{MPa} < [\sigma]$

所以，结构安全。（2 分）

2.若两人相差 180° 旋转到单杠所在平面内（如图（b）所示），结构左右反对称，可以取图（d）部分分析，在对称面上只有反对称内力。根据力法方程得

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0 \qquad \text{（3 分）}$$



图（d）

分别作出 F 和单位力引起的弯矩图如图（d）所示，可得：

$$EI\delta_{11} = \frac{1}{2} \times \frac{L}{2} \times \frac{L}{2} \times \frac{L}{3} + \frac{L}{2} \times H \times \frac{L}{2} = \frac{L^3}{24} + \frac{L^2 H}{4} = 4.32$$

$$EI\Delta_{1F} = -\frac{1}{2} \times \frac{FL}{4} \times \frac{L}{4} \times \frac{5L}{12} - \frac{FL}{4} \times H \times \frac{L}{2} = -\left(\frac{5FL^3}{384} + \frac{FL^2 H}{8}\right) = -2.052F$$

故 $X_1 = -\Delta_{1F} / \delta_{11} = 0.475F$（6 分）

作出结构的弯矩图，可知最大弯矩 $M_{\max} = 0.285F = 285\text{N} \cdot \text{m}$（1 分）

梁的抗弯截面模量　　$W = \frac{\pi}{32} D^3 = \frac{\pi}{32} \times 28^3 = 2155\text{mm}^3$

最大应力　　$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = 132\text{MPa} < [\sigma]$

所以，结构安全。（2 分）

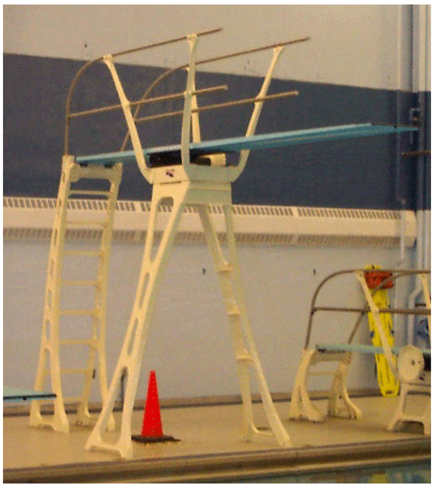
3.在结构中增加横杆后，图（b）为反对称结构，在对称面上只有反对称内力，故 AB 杆轴力为零，对图（b）情况无影响。图（a）为对称结构，在对称面上只有对称内力，故 AB 杆轴力不为零，所以，对图（a）情况有影响。（6 分）

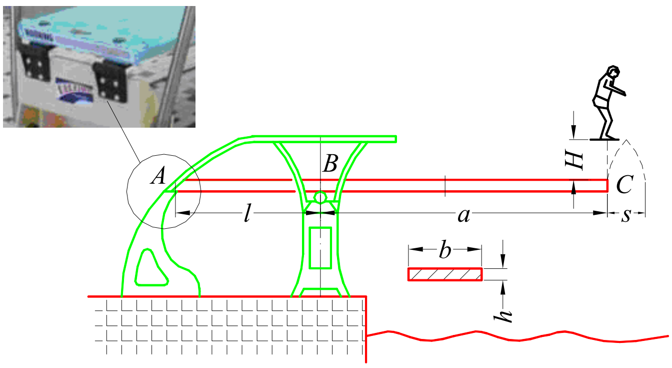
四、跳板跳水(30 分)

举世瞩目的第 29 届北京奥林匹克运动会上，具有“梦之队”之称的中国跳水队获得了跳水比赛 8 枚金牌中的 7 枚，囊括了 3m 跳板跳水的 4 枚金牌。Duraflex 的 Maxiflex Model B 跳水

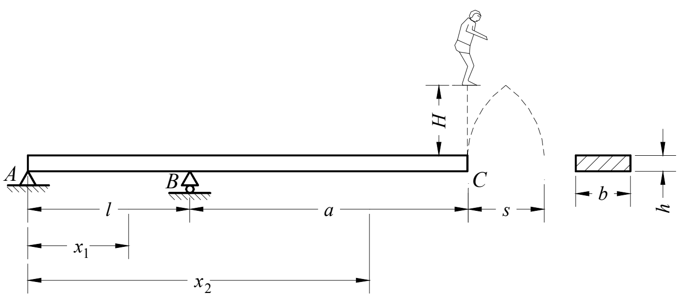
板是奥林匹克跳水比赛和国际级跳水比赛唯一指定使用的产品，它的具体尺寸如图所示，其中横截面尺寸为 $b=0.5\mathrm{m}$， $h=0.05\mathrm{m}$，跳板的弹性模量 $E=70\mathrm{GPa}$ ，比重 $\gamma=25\mathrm{kN/m^3}$ ，$a=3.2\mathrm{m}$ ，$l=1.6\mathrm{m}$ 。运动员从跳板上上跃至距地面最高点后落至跳板端点 *C*，再从跳板上弹起至空中完成动作后落水。若运动员体重 $G=700\mathrm{N}$ ，最大弹跳高度 $H=0.6\mathrm{m}$ ，取 $g=9.8\mathrm{m/s^2}$ 。

1. 根据所学知识，建立相应的力学分析模型。（3 分）
2. 为保证运动员落水安全，运动员从空中落入水中时，在跳板所在平面处，运动员质心距跳板 C 端最小距离 *s* 应大于 0.5m。试求运动员从跳板上跃时所需最小水平速度（假设水平方向为匀速运动）？ （4 分）
3. 不计跳板质量，将运动员看做刚体时，运动员冲击跳板时，跳板中的最大动应力为多少？在上述运动过程中，运动员冲击跳板时的动量损耗是多少？（12 分）
4. 如运动员为弹性体，定性说明在冲击时跳板中的最大动应力增大还是减小？（3 分）
5. 如考虑跳板质量，试计算跳板中的最大动应力。（8 分）





解：1、根据跳板的受力情况，可以将其简化为下图所示外伸梁。



（3 分）

2、从跳板最高处降落到 *A* 点，所需时间为 $t=\sqrt{2H/g}=0.35\mathrm{s}$

运动员从 *A* 点跳起，又降落到同一高度时，所需时间为 2*t*，所以

最小水平速度为　$v = s/2t = 0.714\text{m/s}$ （4 分）

3、将运动员看做刚体时，冲击时的动荷系数为 $K_d = 1 + \sqrt{1 + \dfrac{2H}{\Delta_{C,st}}}$ （3 分）

其中 $\Delta_{C,st} = \dfrac{Ga^3}{3EI} + \dfrac{Ga^2 l}{3EI} = 0.03146\text{m}$，故 $K_d = 7.2565$ （3 分）

跳板的最大静弯矩为 $M_B = Ga = 2240\text{N}\cdot\text{m}$

最大动应力为 $\sigma_{d\max} = K_d \dfrac{M_B}{W} = 78.02\text{MPa}$ （2 分）

在运动员即将碰到跳板时，其竖直方向动量为 $L_1 = \dfrac{G}{g} v_1 = \dfrac{G}{g}\sqrt{2gH}$

在运动员刚碰到跳板时，其竖直方向动量为 $L_2 = \dfrac{G}{g} v_2 = \dfrac{G}{g}\sqrt{2g\Delta_{C,st}}$

所以碰撞过程的动量损失为 $\Delta L = L_1 - L_2 = \dfrac{G}{g}\sqrt{2gH} - \dfrac{G}{g}\sqrt{2g\Delta_{C,st}} = 188.86\text{N}\cdot\text{s}$（4 分）

4、如运动员为弹性体，在冲击时跳板中的最大动应力将减小。 （3 分）

5、考虑跳板质量时，跳板的挠曲线方程为：

AB 段：$y_1 = y_0 + \theta_0 x_1 + \dfrac{F_{Ay}}{6EI} x_1^3 = \dfrac{Gal}{6EI} x_1 - \dfrac{Ga}{6EIl} x_1^3$，$0 \le x_1 \le l$

BC 段：$y_2 = y_0 + \theta_0 x_2 + \dfrac{F_{Ay}}{6EI} x_2^3 + \dfrac{F_{By}}{6EI}(x_2 - l)^3 = -\dfrac{G(x_2 - l)}{6EI}\left[a(3x_2 - l) - (x_2 - l)^2\right]$，

$$l \le x_2 \le l + a$$

其中 $y_0 = y_A = 0$，$\theta_0 = \theta_A = \dfrac{Gal}{6EI}$，$F_{Ay} = -\dfrac{Ga}{l}$，$F_{By} = \dfrac{G(l+a)}{l}$ （2 分）

C 点的挠度为 $y_C = -\dfrac{Ga^2(l+a)}{3EI}$

所以挠曲线方程为：

AB 段：$y_1 = y_C \dfrac{x_1^3 - l^2 x_1}{2al(l+a)}$，$0 \le x_1 \le l$

BC 段：$y_2 = \dfrac{y_C}{2a^2(l+a)}\left[-x_2^3 + 3(a+l)x_2^2 - (4al + 3l^2)x_2 + (al^2 + l^3)\right]$，$l \le x_2 \le l + a$

冲击过程中任一截面速度为

AB 段：$\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=\dfrac{x_1^3-l^2x_1}{2al(l+a)}\times\dfrac{\mathrm{d}y_C}{\mathrm{d}t}$

BC 段：$\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=\dfrac{-x_2^3+3(a+l)x_2^2-\left(4al+3l^2\right)x_2+\left(al^2+l^3\right)}{2a^2(l+a)}\times\dfrac{\mathrm{d}y_C}{\mathrm{d}t}$ （2 分）

梁内的动能为：

AB 段：$\mathrm{d}T_1=\dfrac{\gamma}{2g}bh\mathrm{d}x_1\left[\dfrac{x_1^3-l^2x_1}{2al(l+a)}\right]^2\left(\dfrac{\mathrm{d}y_C}{\mathrm{d}t}\right)^2$

$$T_1=\frac{\gamma bh}{2g}\int_0^l\left[\frac{x_1^3-l^2x_1}{2al(l+a)}\right]^2\left(\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathrm{d}x_1=\beta_1\frac{\gamma bha}{2g}\left(\frac{\mathrm{d}y_C}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

$$\beta_1=\frac{1}{a}\int_0^l\left[\frac{x_1^3-l^2x_1}{2al(l+a)}\right]^2\mathrm{d}x_1=2.6455\times10^{-4}\quad 1/\mathrm{m}$$

BC 段：$\mathrm{d}T_2=\dfrac{\gamma}{2g}bh\mathrm{d}x_2\left[\dfrac{-x_2^3+3(a+l)x_2^2-\left(4al+3l^2\right)x_2+\left(al^2+l^3\right)}{2a^2(l+a)}\right]^2\left(\dfrac{\mathrm{d}y_C}{\mathrm{d}t}\right)^2$

$$T_2=\frac{\gamma bh}{2g}\int_l^{l+a}\left[\frac{-x_2^3+3(a+l)x_2^2-\left(4al+3l^2\right)x_2+\left(al^2+l^3\right)}{2a^2(l+a)}\right]^2\left(\frac{\mathrm{d}y_C}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathrm{d}x_2=\beta_2\frac{\gamma bhl}{2g}\left(\frac{\mathrm{d}y_C}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

$$\beta_2=\frac{1}{l}\int_l^{l+a}\left[\frac{-x_2^3+3(a+l)x_2^2-\left(4al+3l^2\right)x_2+\left(al^2+l^3\right)}{2a^2(l+a)}\right]^2\mathrm{d}x_2=0.5280\quad 1/\mathrm{m}$$

冲击后运动员与跳板以同一速度运动，由动量守恒定律得

$$\frac{G}{g}v=\left[\frac{G}{g}+\frac{\gamma bh(l+a)}{g}\left(\frac{l\beta_1}{(l+a)}+\frac{a\beta_2}{(l+a)}\right)\right]v_3$$

故被冲击构件的相当质量为 $M=\dfrac{\gamma bh}{g}(l\beta_1+a\beta_2)=107.782\ \mathrm{kg}$ （2 分）

所以 $v_3=\dfrac{v}{(1+Mg/G)}$

动荷系数 $K_d=1+\sqrt{1+\dfrac{2H}{(1+\beta)\Delta_{A,st}}}=5.025$，式中 $\beta=Mg/G=1.509$

最大动应力为 $\sigma_{d\max}=K_d\dfrac{M_{\max}}{W}=\dfrac{6K_d}{bh^2}\left(Ga+\dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma bha}{g}a\right)=61.9\ \mathrm{MPa}$ （2 分）